第一章

行列式

教材知识架构

- 行列式
  - 行列式的定义
    - 二阶行列式与三阶行列式
    - n阶行列式
    - 代数余子式
    - 三角行列式
  - 行列式按行（列）展开
  - 行列式的性质与计算
    - 性质
    - 计算
    - 范德蒙德行列式
  - 克拉默法则

本章考纲解读

本章介绍了行列式的相关知识，行列式是解线性方程组产生的一种算式，后拓展成为数学领域的一个基本工具，因此，行列式是线性代数这门课程的关键. 本章的重点是行列式的性质与计算，难点是 n 阶行列式的计算，易错点也是行列式的计算. 本章常考知识点分类如下.

了解：行列式的定义与性质；

行列式中元素的余子式和代数余子式的定义；

行列式按其第 1 行(列) 展开的定义；

克拉默法则.

熟悉：用克拉默法则求解简单的线性方程组；

低阶范德蒙德行列式的计算.

掌握：n 阶行列式的计算；

三角行列式的计算公式.

重难点知识串讲

行列式在线性代数的考试中占很大的比例.从考试大纲来看,虽然只占13%左右.但在其他章的试题中都有涉及行列式计算的内容,故这部分试题在试卷中所占比例远大于13%.

(一)二阶行列式和三阶行列式

1.二阶行列式

为了便于记忆方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$的解,我们引入记号

$$D_2=\begin{vmatrix}a & b\\c & d\end{vmatrix}=ad-bc,$$

称之为二阶行列式.二阶行列式等于它的左上角和右下角的两个元素的乘积减去右上角和左下角的两个元素的乘积.

这样,二元一次方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$的解可以用二阶行列式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}.$$

从这个解的表达式可以看出:

(1)x_1,x_2的分母都是行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$,它是方程组$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$中未知量前面的系数按原顺序排成的二阶行列式.

(2)x_1的分子行列式为$\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$,这个行列式的第1列是原方程组的常数列,第2列由$x_2$的系数组成,它也可以看成是$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$的第1列换成常数项得到的,同样的,$x_2$的分子行列式是由分母行列式的第2列换成常数项得到的.

一般地,我们把由4个数$a_{ij}(i,j=1,2)$得到的式子$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$称为一个二阶行列式,其运算规则为$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

特殊的情形,如$\begin{vmatrix}a & b\\0 & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0\\0 & d\end{vmatrix}=ad$,它们的值与$b$或$c$的值毫无关系.

$\begin{vmatrix}a & b\\c & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & b\\c & d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & b\\c & 0\end{vmatrix}=-bc$,它们的值与$a$或$d$的值毫无关系.

真题链接

(1) 若行列式 $\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = 0$，则 $k =$ ________.

【答案】 -1 或 3

【解析】 由二阶行列式计算公式，$\begin{vmatrix} 1-k & -2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = (1-k)(k-1)+4=0$，可得 $k=-1$ 或 3.

(2) 若 $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$，则 $k =$ ________.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2k-1=0, k=\frac{1}{2}$.

2. 三阶行列式

在讨论三元一次方程组时，引入了三阶行列式这一工具，三阶行列式定义如下.

由 9 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 得到下列式子：

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

从这个定义可以看出，三阶行列式表示 $3!=6$ 项的代数和，每一项都是三个数的乘积并适当附上正号“+”或负号“−”，这三个数取自 D_3 中不同的行和不同的列；反之，任意取自 D_3 中不同的行和不同的列的三个数的乘积适当附上正号“+”或负号“−”后都是 D_3 的定义式中的某一项.

真题链接

若 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则 $k =$ ________.

【答案】 -1

【解析】 因为 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6+k-1-4=k+1=0$，所以 $k=-1$.

(二)n 阶行列式和(代数)余子式

1. n 阶行列式

一阶行列式 $D_1 = |a_{11}| = a_{11}$.

n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

它由 n 行、n 列元素(共 n^2 个元素)组成,称之为 n 阶行列式.

2. 余子式及代数余子式

三阶行列式的余子式和代数余子式:

设有三阶行列式 $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,对任意一个元素 a_{ij},我们划去它所在的第 i 行及第 j 列,剩下的元素按原先次序组成一个二阶行列式,称它为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}.

例如 $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

再记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

例如 $A_{11} = M_{11}$,$A_{21} = -M_{21}$,$A_{31} = M_{31}$.

n 阶行列式的余子式和代数余子式:

在 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列后剩下的 $n-1$ 行和 $n-1$ 列元素,按原来的相对的顺序组成一个 $n-1$ 阶行列式,记为 M_{ij},即

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称 M_{ij} 为元素 a_{ij} 的余子式;令 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式($i,j = 1,2,\cdots,n$).

真题链接

(1) 3 阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21} = ($　　$)$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

【答案】 C

【解析】 $A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1.$

（2）已知 3 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & x & 3\\ x & 2 & 0\\ 5 & -1 & 4\end{vmatrix}$中元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=8$，求元素 a_{21} 的代数余子式 A_{21} 的值.

【答案】 5

【解析】 由 $A_{12}=-\begin{vmatrix}x & 0\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-4x=8$，得 $x=-2$，所以 $A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-(-8+3)=5.$

（3）已知 $D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}$，则 D 中第 1 行第 2 列元素的代数余子式为________.

【答案】 -2

【解析】 参考代数余子式定义. D 中第 1 行第 2 列元素的代数余子式为 $(-1)^{1+2}2=-2$.

（4）行列式 $\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 5 & 3 & -2 & 2\end{vmatrix}$中第 4 行各元素的代数余子式之和为________.

【答案】 0

【解析】 参考代数余子式定义，行列式中第 4 行的代数余子式之和为

$$(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}+(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}$$

$=4-3-1=0.$

（5）设行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 4\\ 2 & 2 & 2\\ 5 & 3 & -2\end{vmatrix}$，其第 3 行各元素的代数余子式之和为________.

【答案】 0

【解析】 第 3 行元素的代数余子式之和为

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 2\end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8+2+6=0.$$

（6）行列式 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$中，$a_{22}$ 的代数余子式为（　　）

A. $\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$　　B. $-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$　　C. $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$　　D. $-\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$

【答案】 C

【解析】 a_{22} 的代数余子式为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$，选 C.

（三）行列式按行（列）展开

定理 1（行列式展开定理） n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积的和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或
$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n),$$

其中，A_{ij} 是元素 a_{ij} 在 D 中的代数余子式，前一式称为 D 按第 i 行的展开式，后一式称为 D 按第 j 列的展开式.

备注：本定理说明，行列式可以按其任意一行或按其任意一列展开来求出它的值.

真题链接

（1）设三阶行列式 D_3 的第 2 行元素分别为 $1,-2,3$，对应的代数余子式分别为 $-3,2,1$，则 $D_3=$ ________.

【答案】 -4

【解析】 $D_3=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=1\times(-3)+(-2)\times 2+3\times 1=-4$.

（2）计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 10 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{vmatrix}=$ （　　）

A. -180　　B. -120　　C. 120　　D. 180

【答案】 A

【解析】 观察可知，第 3 行的零元素最多，可按照第 3 行元素展开，可得到行列式的值为 -180.

（四）行列式的性质

性质 1 　行列式和它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 2 　用数 k 乘行列式 D 中某一行（列）的所有元素所得到的行列式等于 kD，也就是说，行列式可以按行或列提出公因数.

性质 3 　互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号.

推论 　如果行列式中有两行（列）相同，则此行列式的值等于零.

性质 4 　如果行列式中某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零.

性质 5 　若行列式的某一行（列）的元素是两个数之和，则这个行列式可以拆成两个行列式之和.

性质 6　把行列式 D 的某一行(列)的所有元素都乘以同一个数以后加到另一行(列)的对应元素上去,所得的行列式仍为 D.

定理 2　n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的任意一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即 $a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0(i\neq k)$ 或 $a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=0(j\neq s)$.

真题链接

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{vmatrix}=$ ________.

【答案】 0

【解析】 直接由行列式的性质:行成比例则行列式的值为零.

(2) 已知三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & 4a_{22} & 6a_{23} \\ 3a_{31} & 6a_{32} & 9a_{33} \end{vmatrix}=6$,则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$ ________.

【答案】 $\frac{1}{6}$

【解析】 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ 2a_{21} & 4a_{22} & 6a_{23} \\ 3a_{31} & 6a_{32} & 9a_{33} \end{vmatrix}=2\times3\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=2\times3\times2\times3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$=6$,所以 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\frac{1}{6}$.

(3) 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$,那么 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=$ (　　)

A. -24　　B. -12　　C. -6　　D. 12

【答案】 B

【解析】 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -2a_{31} & -2a_{32} & -2a_{33} \end{vmatrix}=2\times(-2)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2\times(-2)\times3=-12$.

(4) 设行列式 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$,则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ (　　)

A. $\frac{2}{3}$　　B. 1　　C. 2　　D. $\frac{8}{3}$

【答案】 A

【解析】 $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=1$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{4}{3} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\times\frac{1}{3}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{2}{3}$.

（5）已知二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=n$，则 $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 \end{vmatrix}=$（　　）

A. $m-n$　　　　B. $n-m$

C. $m+n$　　　　D. $-(m+n)$

【答案】 B

【解析】 $\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1+c_1 & a_2+c_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=-m+n=n-m$.

（6）行列式 $\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2009 & 2010 \end{vmatrix}$ 的值为________.

【答案】 -2

【解析】 $\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2009 & 2010 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2007+2 & 2008+2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2007 & 2008 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2007 & 2008 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$=0+2(2007-2008)=-2$.

（7）设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=4$，则行列式 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）

A. 12　　　　B. 24

C. 36　　　　D. 48

【答案】 B

【解析】 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{vmatrix}=2\times 3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=24$.

（8）设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，则 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）

A. -6　　B. -3　　C. 3　　D. 6

【答案】 D

【解析】 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=6$.

(9) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2$,则 $\begin{vmatrix} -a_{11} & 2a_{12} & -3a_{13} \\ -a_{21} & 2a_{22} & -3a_{23} \\ -a_{31} & 2a_{32} & -3a_{33} \end{vmatrix} =$ ( )

A. -12 B. -6

C. 6 D. 12

【答案】 D

【解析】 $\begin{vmatrix} -a_{11} & 2a_{12} & -3a_{13} \\ -a_{21} & 2a_{22} & -3a_{23} \\ -a_{31} & 2a_{32} & -3a_{33} \end{vmatrix} = (-1)\times 2\times(-3)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12.$

(10) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 1$, $\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = -1$,则行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix} =$ ( )

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

【答案】 B

【解析】 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1-c_1 \\ a_2 & b_2-c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 1-1=0.$

(11) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 3$,则 $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} =$ ________.

【答案】 6

【解析】 $\begin{vmatrix} a_1 & 2b_1+c_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2+c_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & c_1 \\ a_2 & 2b_2 & c_2 \\ a_3 & 2b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 6.$

(12) 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 3$,则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12}+5a_{11} \\ a_{21} & 2a_{22}+5a_{21} \end{vmatrix} =$ ( )

A. -15 B. -6 C. 6 D. 15

【答案】 C

【解析】 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12}+5a_{11} \\ a_{21} & 2a_{22}+5a_{21} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} \\ a_{21} & 2a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 5a_{11} \\ a_{21} & 5a_{21} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6.$

(五) 行列式的计算

1. 行列式的计算方法

行列式的计算主要采用以下两种基本方法.

方法 1:利用行列式性质,把原行列式化为上三角(或下三角)行列式再求值,此时要注意的是,在互换两行或两列时,必须在新的行列式的前面乘上(-1),在按行或按列提取公因子 k 时,

必须在新的行列式前面乘上 k.

方法 2:把原行列式按选定的某一行或某一列展开,把行列式的阶数降低,再求出它的值,通常是利用性质在某一行或某一列中产生很多个“0”元素,再按这一行或这一列展开.

注意:二阶、三阶行列式可按照公式直接展开计算,而高阶行列式常采用上述两种方法计算.

例 1 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\5&2&3&2\\7&0&2&5\end{vmatrix}$.

解:观察到第 4 行第 2 列的元素为 0,而且第 1 行第 2 列的元素是 $a_{12}=1$,利用这个元素可以把这一列其他两个非零元素化为 0,然后按第二列展开.

$$D_4=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&2&1\\5&2&3&2\\7&0&2&5\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+(-2)\times r_1]{r_2+r_1}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&6&2\\1&0&-5&0\\7&0&2&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } c_2 \text{ 展开}}-\begin{vmatrix}5&6&2\\1&-5&0\\7&2&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2+5\times c_1}-\begin{vmatrix}5&31&2\\1&0&0\\7&37&5\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按 } r_2 \text{ 展开}}\begin{vmatrix}31&2\\37&5\end{vmatrix}=81.$$

例 2 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}$.

解:方法 1:这个行列式的元素含有字母,在计算它的值时,切忌用字母作分母,因为字母可能取 0 值.要注意观察其特点,这个行列式的特点是它的每一行元素之和均为 $a+3b$,我们可以先把后 3 列都加到第 1 列上去,提出第一列的公因子 $a+3b$,再将后 3 行都减去第 1 行.

$$\begin{vmatrix}a&b&b&b\\b&a&b&b\\b&b&a&b\\b&b&b&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a+3b&b&b&b\\a+3b&a&b&b\\a+3b&b&a&b\\a+3b&b&b&a\end{vmatrix}=(a+3b)\begin{vmatrix}1&b&b&b\\1&a&b&b\\1&b&a&b\\1&b&b&a\end{vmatrix}$$

$$=(a+3b)\begin{vmatrix}1&b&b&b\\0&a-b&0&0\\0&0&a-b&0\\0&0&0&a-b\end{vmatrix}=(a+3b)(a-b)^3.$$

方法 2:观察到这个行列式每一行元素中有多个 b,我们采用“加边法”来计算,即构造一个与 D_4 有相同值的五阶行列式.

$$D_4=\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & b & b & b & b \\ 0 & a & b & b & b \\ 0 & b & a & b & b \\ 0 & b & b & a & b \\ 0 & b & b & b & a \end{vmatrix}\xlongequal{r_2,r_3,r_4,r_5+r_1\times(-1)}\begin{vmatrix} 1 & b & b & b & b \\ -1 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

这样得到一个“箭形”行列式，如果 $a=b$，则原行列式的值为零，故不妨假设 $a\neq b$，即 $a-b\neq 0$，把后 4 列的 $\dfrac{1}{a-b}$ 倍加到第 1 列上，可以把第 1 列的 (-1) 化为零.

$$D_4=\begin{vmatrix} 1+\dfrac{4b}{a-b} & b & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=\left[1+\frac{4b}{a-b}\right](a-b)^4=(a+3b)(a-b)^3.$$

2. 特殊行列式的计算

(1) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) Ⅰ 型三角形行列式

上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) Ⅱ 型三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

真题链接

（1）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}$ 的值.

【解析】 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&0&0\\1&0&3&0\\1&0&0&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&-1&2&-1\\0&-1&-1&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&-2\\0&0&-2&2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-1&-1\\0&0&1&-2\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=-2.$$

（2）计算六阶行列式 $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0&0\\3&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{vmatrix}$.

【解析】 $\begin{vmatrix}1&2&0&0&0&0\\3&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&2\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&2&0&0&1\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\2&0&0&1\end{vmatrix}=-6\begin{vmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{vmatrix}$

$$=-6\times(-3)=18.$$

（3）计算行列式 $D=\begin{vmatrix}5&3&3&3\\3&5&3&3\\3&3&5&3\\3&3&3&5\end{vmatrix}$.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}5&3&3&3\\3&5&3&3\\3&3&5&3\\3&3&3&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14&3&3&3\\14&5&3&3\\14&3&5&3\\14&3&3&5\end{vmatrix}=14\begin{vmatrix}1&3&3&3\\1&5&3&3\\1&3&5&3\\1&3&3&5\end{vmatrix}$

$$=14\begin{vmatrix}1&3&3&3\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=112.$$

(4) 求行列式 $D=\begin{vmatrix}1&-3&4&0\\4&0&3&5\\2&0&2&-2\\7&6&-2&2\end{vmatrix}$ 的值.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}1&-3&4&0\\4&0&3&5\\2&0&2&-2\\7&6&-2&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-3&4&0\\4&0&3&5\\2&0&2&-2\\9&0&6&2\end{vmatrix}=-(-3)\begin{vmatrix}4&3&5\\2&2&-2\\9&6&2\end{vmatrix}$

$$=3\begin{vmatrix}1&3&8\\0&2&0\\3&6&8\end{vmatrix}=3\times2\begin{vmatrix}1&8\\3&8\end{vmatrix}=6\times(-16)=-96.$$

(5) 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{vmatrix}$.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\5&6&7&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\4&5&6&7\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&3&4&5\\3&4&5&6\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0.$

(6) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+a^3&b+b^3&c+c^3\end{vmatrix}$ 的值.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a+a^3&b+b^3&c+c^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&b&c\\a^2&b^2&c^2\\a^3&b^3&c^3\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}$

$$=abc\begin{vmatrix}1&1&1\\0&b-a&c-a\\0&b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}b-a&c-a\\b^2-a^2&c^2-a^2\end{vmatrix}$$

$$=abc(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1&1\\b+a&c+a\end{vmatrix}=abc(b-a)(c-a)(c-b).$$

(7) 计算五阶行列式 $D=\begin{vmatrix}2&0&0&0&1\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&2&0\\1&0&0&0&2\end{vmatrix}$.

【解析】 连续 3 次按第 2 行展开，$D=2\begin{vmatrix}2&0&0&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\1&0&0&2\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=8\times 3=24$.

(8) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\2b&b-a-c&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-b-a-c&0\\0&0&-c-a-b\end{vmatrix}$

$=(a+b+c)^3$.

(9) 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}$.

【解析】 $D=10\times\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\times\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&2&-1\\3&1&-2&-1\\4&-3&-2&-1\end{vmatrix}$

$=10\times\begin{vmatrix}1&2&-1\\1&-2&-1\\-3&-2&-1\end{vmatrix}=10\times\begin{vmatrix}0&2&-1\\0&-2&-1\\-4&-2&-1\end{vmatrix}$

$=10\times(-4)\begin{vmatrix}2&-1\\-2&-1\end{vmatrix}=160$.

(10) 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

【解析】 原式$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & -19 \end{vmatrix}=57.$$

(11) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

【解析】 $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 13 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -10 & -12 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 48 \end{vmatrix}$$

$=1\times1\times1\times48=48.$

(12) 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

【解析】 原式$\xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4}\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$=-5\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=5.$$

(13) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a+b & a & b \\ a & a+b & b \\ a & b & a+b \end{vmatrix}$.

【解析】 原行列式$=\begin{vmatrix} 2(a+b) & a & b \\ 2(a+b) & a+b & b \\ 2(a+b) & b & a+b \end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a+b & b \\ 1 & b & a+b \end{vmatrix}$

$$=2(a+b)\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & b-a & a \end{vmatrix}=2(a+b)\begin{vmatrix} b & 0 \\ b-a & a \end{vmatrix}=2ab(a+b).$$

(14) 计算四阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$.

【解析】 原式$=2\times3\times4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=24\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=192.$

(15) 计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$，其中 a,b,c,d 为常数.

【解析】 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a+b+c+d \\ -1 & 1 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

$$=-(a+b+c+d)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=a+b+c+d.$$

(16) 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$的值.

【解析】 $D=\begin{vmatrix}1&3&2&4\\4&1&3&2\\2&4&1&3\\3&2&4&1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&0&0&0\\4&-3&-1&-2\\2&2&-1&1\\3&-1&1&-2\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}-3&-1&-2\\2&-1&1\\-1&1&-2\end{vmatrix}$

$=10\begin{vmatrix}-5&-1&-3\\0&-1&0\\1&1&-1\end{vmatrix}=-10\begin{vmatrix}-5&-3\\1&-1\end{vmatrix}=-80.$

3. 范德蒙德行列式

范德蒙德行列式是一类特殊的行列式，它的第 1 行都是 1，第 2 行是 $x_1, x_2, x_3 \cdots, x_n$，第 3 行是第 2 行的平方，第 4 行是第 2 行的立方，……，第 n 行是第 2 行的 $n-1$ 次方. 一般考试中出现较多的是三阶的范德蒙德行列式，即

$$V_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1&x_2&x_3\\x_1^2&x_2^2&x_3^2\end{vmatrix}=(x_3-x_2)(x_2-x_1)(x_3-x_1).$$

真题链接

(1) 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=$ ________.

【答案】 2

【解析】 根据三阶范德蒙德行列式公式，原行列式 $=(3-2)(3-1)(2-1)=2$.

(2) 行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&4&6\\4&16&36\end{vmatrix}=$ ________.

【答案】 16

【解析】 根据三阶范德蒙德行列式公式，原行列式 $=(6-4)(6-2)(4-2)=16$.

（六）克拉默法则

定理 3（克拉默法则） 设含有 n 个方程的 n 元线性方程组为

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\qquad\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases}$$

如果其系数行列式 $D=|a_{ij}|_n\neq 0$，则方程组必有唯一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}, j=1,2,\cdots,n$，其中 D_j 是把

D 中第 j 列换成常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 后得到的行列式.

把这个法则应用于齐次线性方程组,则有

定理 4 设含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{m}x_n=0, \end{cases}$$

如果其系数行列式 $D\neq 0$,则该方程组只有零解:$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$.

换句话说,若齐次线性方程组有非零解,则必有 $D=0$,在教材第二章中,将要证明,含有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零.

备注:克拉默法则一般会结合第二章矩阵的理论考查.

知识强化训练

一、单项选择题

1.行列式 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 3 & k-2 \end{vmatrix}=0$,则 ( )

A. $k=1$ 或 $k=-4$ B. $k=-1$

C. $k=-1$ 或 $k=4$ D. $k=1$ 或 $k=4$

2.若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0$,则 $x=$ ( )

A. 3 B. -2 C. -3 D. 2

3. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$,则 $\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21}-3a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$ ( )

A. 6 B. -3 C. -6 D. 0

4.行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=$ ( )

A. $a^4\cdot b^4$ B. b^4-a^4 C. a^4-b^4 D. $(a^2-b^2)^2$

5.行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & -1 & a & 1 \end{vmatrix}$ 中元素 a 的代数余子式的值为 ( )

A. -104　　B. 176　　C. 104　　D. -176

6. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 \end{vmatrix}=4$，则 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=$　　(　　)

A. -4　　B. -2　　C. 2　　D. 4

二、填空题

1. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

2. 如果 $\begin{vmatrix} 1 & x & 4 \\ 0 & 3 & x \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ 中 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=2$，则 a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=$ ________.

3. 已知四阶行列式 D 的第一行元素依次为 $1,3,0,-1$，第三行元素对应的代数余子式依次为 $3,k,-7,6$，则 $k=$ ________.

4. 设 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=$ ________.

5. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ x & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 中 a_{12} 元素的代数余子式 $A_{12}=1$，则 $A_{33}=$ ________.

6. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=2$，求 $\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=$ ________.

三、计算题

1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

2. 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & q \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{vmatrix}$ 的值.

3.计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$ 的值.

4.计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 527 & 327 \\ 5 & 643 & 443 \\ 8 & 821 & 621 \end{vmatrix}$.

5.求 4 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

6.计算 3 阶行列式 $\begin{vmatrix} 123 & 23 & 3 \\ 249 & 49 & 9 \\ 367 & 67 & 7 \end{vmatrix}$.

7.计算行列式 $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$.

8.计算行列式 $D_6=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

9. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} b+c+2a & b & c \\ a & a+c+2b & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix}$.

10.计算行列式 $D=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^2+x^3 & y^2+y^3 & z^2+z^3 \end{vmatrix}$.

11.用克拉默法则解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=2, \\ 2x_1+x_2+2x_3=3. \end{cases}$

参考答案及解析

一、单项选择题

1.**【答案】** C

【解析】　由二阶行列式计算公式,原行列式 $=(k-1)(k-2)-6=0$, 所以 $k=-1$ 或 $k=4$.

2.【答案】　A

【解析】　$\begin{vmatrix}1&2&5\\1&3&-2\\2&5&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&5\\1&3&-2\\0&0&x-3\end{vmatrix}=(x-3)\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=x-3=0$,所以 $x=3$.

3.【答案】　C

【解析】　由行列式的性质,$\begin{vmatrix}2a_{11}&a_{11}-3a_{12}&a_{13}\\2a_{21}&a_{21}-3a_{22}&a_{23}\\2a_{31}&a_{31}-3a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=2\times(-3)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=-6$.

4.【答案】　D

【解析】　利用行列式的性质展开,

$$\begin{vmatrix}a&0&0&b\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\b&0&0&a\end{vmatrix}=a\begin{vmatrix}a&b&0\\b&a&0\\0&0&a\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0&0&b\\a&b&0\\b&a&0\end{vmatrix}=a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2)=(a^2-b^2)^2.$$

5.【答案】　C

【解析】　a 的代数余子式为 $-\begin{vmatrix}-1&0&5\\1&7&4\\2&4&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&4\\4&10\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&7\\2&4\end{vmatrix}=104$.

6.【答案】　B

【解析】　方法 1:直接由二阶行列式计算公式得 $2(a_2b_1-a_1b_2)=4$,所求行列式 $=-(a_2b_1-a_1b_2)=-2$.

方法 2:利用行列式的性质,先对已知行列式进行拆分,最后也能求得结果.

二、填空题

1.【答案】　12

【解析】　将行列式按第 4 行展开得,

原式 $=a_{41}A_{41}=2\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}0&1&2\\0&1&0\\3&0&0\end{vmatrix}=2\times(-1)\times(-6)=12$.

2.【答案】　-1

【解析】　由 $A_{12}=-1\times\begin{vmatrix}0&x\\2&5\end{vmatrix}=2x=2$,得 $x=1$,则 $A_{21}=-1\times\begin{vmatrix}1&4\\1&5\end{vmatrix}=-1$.

3.【答案】　1

【解析】　$1\times3+3k+0\times(-7)+(-1)\times6=0$,可得 $k=1$.

4.【答案】　0

【解析】 观察行列式最后一行，元素都为1，所以第4行的元素与第2行元素对应的代数余子式乘积之和为0，所以 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=0$.

5.【答案】 2

【解析】 由于 $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} x & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-x=1$，解得 $x=-1$. 所以 $A_{33}=(-1)^{6}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=2$.

6.【答案】 -20

【解析】 $\begin{vmatrix} -a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & 2a_{22} & 2a_{23} \\ -5a_{31} & 5a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=(-1)\times 2\times 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-20$.

三、计算题

1.【解析】 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0$.

2.【解析】
$$\begin{vmatrix} p & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p & q & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p & q \\ q & 0 & 0 & \cdots & 0 & p \end{vmatrix}=p\begin{vmatrix} p & q & \cdots & 0 \\ 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}q\begin{vmatrix} q & 0 & \cdots & 0 \\ p & q & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q \end{vmatrix}$$
$$=p^{n}+(-1)^{n+1}q^{n}.$$

3.【解析】
$$\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+\cdots+x_n-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-a & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1+x_2+\cdots+x_n-a & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$
$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$
$$=(x_1+x_2+\cdots+x_n-a)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}$$
$$=(-a)^{n-1}(x_1+x_2+\cdots+x_n-a).$$

4.【解析】
$$\begin{vmatrix} 4 & 527 & 327 \\ 5 & 643 & 443 \\ 8 & 821 & 621 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 200 & 327 \\ 5 & 200 & 443 \\ 8 & 200 & 621 \end{vmatrix}=200\begin{vmatrix} 4 & 1 & 327 \\ 5 & 1 & 443 \\ 8 & 1 & 621 \end{vmatrix}=200\begin{vmatrix} 4 & 1 & 327 \\ 1 & 0 & 116 \\ 4 & 0 & 294 \end{vmatrix}$$

$$=-200\begin{vmatrix}1 & 116\\4 & 294\end{vmatrix}=34\ 000.$$

5.【解析】$\begin{vmatrix}1&1&1&4\\1&1&3&1\\1&2&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&4\\0&0&2&-3\\0&1&0&-3\\0&0&0&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&2&-3\\1&0&-3\\0&0&-3\end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}=6.$

6.【解析】$\begin{vmatrix}123&23&3\\249&49&9\\367&67&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100&23&3\\200&49&9\\300&67&7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}100&20&3\\200&40&9\\300&60&7\end{vmatrix}=0.$

7.【解析】$D=\begin{vmatrix}x&a&a&a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3a&a&a&a\\x+3a&x&a&a\\x+3a&a&x&a\\x+3a&a&a&x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+3a&a&a&a\\0&x-a&0&0\\0&0&x-a&0\\0&0&0&x-a\end{vmatrix}$

$=(x+3a)(x-a)^3.$

8.【解析】$D_6=\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&5&\cdots&0&0\\6&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}\xlongequal[c_3\leftrightarrow c_4]{\substack{c_1\leftrightarrow c_6\\c_2\leftrightarrow c_5}}(-1)^3\begin{vmatrix}1&0&\cdots&0&0\\0&2&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&5&0\\0&0&\cdots&0&6\end{vmatrix}=-6!.$

9.【解析】$D=\begin{vmatrix}b+c+2a&b&c\\a&a+c+2b&c\\a&b&a+b+2c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2a+2b+2c&b&c\\2a+2b+2c&a+c+2b&c\\2a+2b+2c&b&a+b+2c\end{vmatrix}$

$=2(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\1&a+c+2b&c\\1&b&a+b+2c\end{vmatrix}$

$=2(a+b+c)\begin{vmatrix}1&b&c\\0&a+b+c&0\\0&0&a+b+c\end{vmatrix}$

$=2(a+b+c)^3.$

10.【解析】$D=\begin{vmatrix}x&y&z\\x^2&y^2&z^2\\x^2+x^3&y^2+y^3&z^2+z^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&y&z\\x^2&y^2&z^2\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&y&z\\x^2&y^2&z^2\\x^3&y^3&z^3\end{vmatrix}$

$=0+xyz\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=xyz(z-y)(z-x)(y-x).$

注：最后一步是根据三阶范德蒙德行列式计算公式得出的.

11.【解析】系数行列式为 $D=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&4&2\\2&1&2\end{vmatrix}=4$，而且 $D_1=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&4&2\\3&1&2\end{vmatrix}=8$，$D_2=\begin{vmatrix}1&1&0\\3&2&2\\2&3&2\end{vmatrix}=-4$，

$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&4&2\\2&1&3\end{vmatrix}=0$. 所以方程组有唯一解：$x_1=2$，$x_2=-1$，$x_3=0$.